

Experiências com projéteis e ondas

AULA

1

Meta da aula

Descrever experiências de interferência por uma fenda dupla com projéteis e ondas.

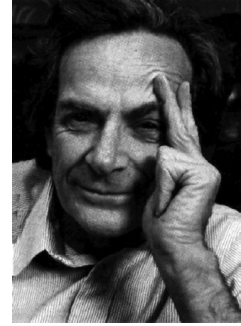
objetivos

- analisar o comportamento de projéteis ao passar por uma fenda dupla;
- avaliar o comportamento de ondas ao passar por uma fenda dupla;
- relembrar o conceito de interferência em ondas.

Pré-requisitos

Para esta aula, é importante revisar interferência de ondas: Aula 12 da disciplina Física 2B e Aula 8 da disciplina Física 4A.

Não leve essa aula muito a sério... apenas relaxe e desfrute dela. Vou contar para vocês como a natureza se comporta. Se você admitir simplesmente que ela tem esse comportamento, você a considerará encantadora e cativante. Não fique dizendo para si próprio: "Mas como ela pode ser assim?" porque nesse caso você entrará em um beco sem saída do qual ninguém escapou ainda. Ninguém sabe como a natureza pode ser assim.



Richard Feynman
Prêmio Nobel de Física 1965

A MECÂNICA DOS OBJETOS MICROSCÓPICOS

Iniciamos nosso estudo de Física pela chamada mecânica newtoniana ou mecânica clássica. A mecânica clássica, que foi o objeto de estudo nas disciplinas Física 1A e Física 1B, é a mecânica dos objetos *macroscópicos*, ou seja, aqueles de dimensões palpáveis ou visíveis a olho nu: bolas, projéteis, carros, aviões, planetas etc. Aprendemos que tais objetos obedecem muito bem às leis de Newton. Em muitas situações, podem ser descritos como *partículas* ou *corpúsculos*, ou seja, sua estrutura interna pode muitas vezes ser ignorada e eles podem ser descritos como objetos pontuais que se movem no espaço. O comportamento destes objetos consiste na física mais corriqueira do nosso dia-a-dia, aquela que aprendemos de forma intuitiva desde que somos bebês, de modo que pensamos ter uma noção bem clara de como deve se comportar uma partícula em uma determinada situação.

Em seguida, aprendemos a física das *ondas* na disciplina Física 2A. Por exemplo, vimos que as ondas sonoras ou as ondas na superfície de um lago apresentam um comportamento bem diferente daquele das partículas (apesar de o ar e a água, os meios onde estas ondas se propagam, serem formados por partículas). Surgem, por exemplo, os fenômenos de *difração* e *interferência*, que não podem ser descritos pela mecânica das partículas. Aprendemos, ainda, na disciplina Física 4A, que a luz é um tipo de onda eletromagnética.

Neste curso, iremos introduzir uma mecânica completamente nova e diferente da mecânica clássica e da mecânica ondulatória. É a mecânica que descreve os objetos microscópicos, como átomos e elétrons, por exemplo. Veremos que tais objetos se comportam em muitas situações como partículas e, em outras, como ondas. Mas não são nem uma coisa nem outra! Eles obedecem às leis da *mecânica quântica*.



Você teve uma breve introdução a algumas idéias e experimentos iniciais da física quântica na disciplina Física 4B. Na presente disciplina, vamos explorar com muito mais profundidade o mundo quântico.

Apesar de lidar com objetos de dimensões atômicas, pouco familiares a nós, a mecânica quântica não é uma teoria abstrata ou sem aplicações no mundo real. Pelo contrário, muitas invenções que fazem parte do nosso dia-a-dia só foram possíveis por causa da mecânica quântica: o computador, o laser, a energia nuclear, as imagens de ressonância magnética etc. Em 2000, a revista *Scientific American* estimou que 1/3 do produto interno bruto dos EUA estava ligado à mecânica quântica!

Apesar de estarmos descrevendo-a como “nova”, a mecânica quântica já é uma anciã, tem mais de 100 anos de idade! E ela não surgiu de uma inspiração teórica, pelo contrário, foi uma necessidade imposta (a contragosto de muitos) pelos experimentos realizados naquela época, que mostravam resultados em contradição marcante com a física clássica. A história destes experimentos e do desenvolvimento e aceitação graduais da nova teoria quântica está descrita em vários livros e é extremamente rica e interessante, mas está além dos objetivos desta disciplina.

UMA EXPERIÊNCIA COM PROJÉTEIS

Para mostrar que os objetos microscópicos não se comportam nem como ondas nem como partículas, escolhemos um experimento onde este comportamento se manifesta de forma marcante: a experiência de interferência por uma fenda dupla. Você se lembra quando viu esta experiência no caso de ondas de luz na Aula 8 da disciplina Física 4A? Tornaremos a tratar deste caso (ondas) em breve, mas, inicialmente, iremos descrever o comportamento de projéteis (balas de canhão ou bolinhas de gude, por exemplo) ao passar por uma fenda dupla. Em seguida, iremos analisar o comportamento das ondas e, finalmente, o de objetos microscópicos, como os elétrons.

O aparato experimental está esquematizado na **Figura 1.1.a**. Há uma metralhadora que dispara projéteis, um de cada vez, em direções aleatórias. Em frente à metralhadora, há uma parede que impede a passagem dos projéteis, exceto por dois pequenos buracos. Mais adiante, há um anteparo, onde os projéteis que conseguem passar pelos buracos se alojam, e sua chegada é verificada por um detetor deslocável. Este detetor pode ser uma caixa com areia, por exemplo, onde os projéteis se depositam. Depois, podemos contar quantos projéteis chegaram em cada posição da parede em um certo intervalo de tempo. A posição ao longo da parede é descrita por uma coordenada x , medida a partir do centro.

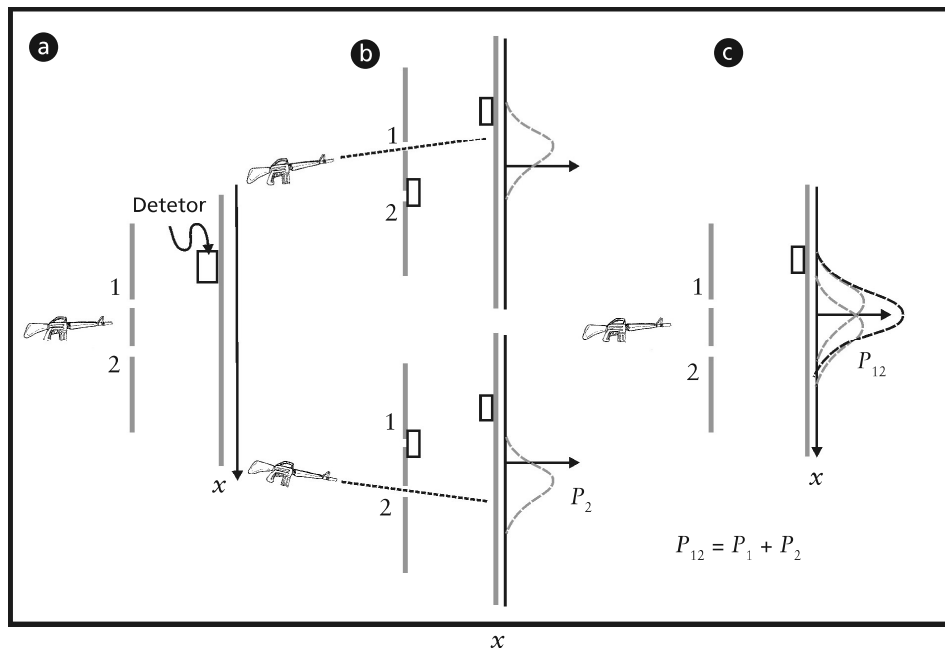


Figura 1.1: (a) Esquema do experimento de fenda dupla com projéteis. (b) Situação experimental e distribuições de probabilidades obtidas quando uma das fendas é fechada. (c) Situação experimental e distribuição de probabilidade obtida quando as duas fendas estão abertas.

Nossa primeira observação parece um pouco óbvia, dada nossa grande intuição com partículas clássicas: cada projétil chega intacto ao detetor, como se fossem “pacotes” idênticos, um de cada vez. É claro, estamos supondo que são projéteis indestrutíveis... Não se observa a chegada de “meio projétil” ou a chegada de dois projéteis simultaneamente em lugares diferentes. *Projéteis sempre chegam em pacotes idênticos.*

Em seguida, usando esse aparato simples, podemos tentar responder à seguinte pergunta: “Qual a probabilidade de um projétil acertar a posição x ?” Naturalmente, temos de falar em probabilidades, pois é impossível saber com certeza absoluta a trajetória de cada partícula, já que elas são lançadas em direções aleatórias e podem ricochetear de forma imprevisível nas bordas dos buracos. Mas a probabilidade pode ser facilmente medida, tomando-se a fração de projéteis que chegam a uma certa posição em relação ao número total de projéteis que acertam todo o anteparo, no mesmo intervalo de tempo. Se fizermos a medida, obteremos a distribuição de probabilidades P_{12} mostrada na **Figura 1.1.c**, que tem este nome porque os projéteis podem passar tanto pelo buraco 1 como pelo buraco 2. A curva P_{12} tem um máximo em torno de $x = 0$ e decai para valores muito pequenos se tomamos valores de x muito distantes da origem.

Mas por que o valor máximo de P_{12} fica em torno de $x = 0$? De fato, isto acontece apenas se a distância entre os buracos for suficientemente pequena (veja a Atividade 1 desta aula), mas é com esta situação que queremos lidar. Podemos entender isto se fizermos novamente o experimento, mas, desta vez, fechando um dos buracos, como mostra a **Figura 1.1.b**. Se fechamos o buraco 2, medimos a distribuição de probabilidades P_1 mostrada no painel superior. E se fechamos o buraco 1, medimos a distribuição P_2 mostrada do painel inferior. Como esperado, a distribuição P_1 tem seu valor máximo na posição x na parede que está ao longo da reta tracejada que vai da metralhadora ao buraco 1. E a distribuição P_2 se comporta de forma análoga.

A distribuição conjunta P_{12} é simplesmente a soma das distribuições parciais:

$$P_{12} = P_1 + P_2 \quad (1.1)$$

Ou seja, o efeito obtido quando temos os dois buracos abertos é a soma dos efeitos de cada buraco individualmente. Isto quer dizer que *projéteis não sofrem interferência*, como veremos a seguir que ocorre com ondas.

Isto resume nosso entendimento sobre projéteis incidindo em uma fenda dupla: primeiro, eles chegam em pacotes idênticos; segundo, não apresentam interferência.

ATIVIDADE



Uma metralhadora despeja balas em uma fenda dupla, como mostrado na **Figura 1.1**. As balas passam pelo buraco 1. Elas, então, se depositam no anteparo, de acordo com uma distribuição de probabilidades que pode ser aproximada por uma gaussiana com largura σ e máximo em $x = d$, ou seja, $P_1(x) = Ae^{-(x-d)^2/2\sigma^2}$, onde A é um fator de normalização. Já as balas que passam pelo buraco 2 se depositam em torno de $x = -d$ de forma análoga: $P_2(x) = Ae^{-(x+d)^2/2\sigma^2}$. Se a largura σ for muito maior que d , a distribuição resultante ($P_{12} = P_1 + P_2$) terá um único pico, como na **Figura 1.1.c**. Porém, se σ for muito menor que d , a distribuição resultante terá dois picos. Encontre, em função de d , o valor de σ que separa estes dois regimes.

RESPOSTA COMENTADA

Graficamente, é muito claro observar se uma curva tem um pico ou dois picos. A dificuldade deste problema está em expressar matematicamente estas situações. Bem, sabemos que uma função que apresenta um máximo local tem derivada nula neste ponto e derivada segunda negativa. Já se a função tiver um mínimo local, ela terá derivada nula e derivada segunda positiva. Faça agora um esboço da distribuição P_{12} nas duas situações: com um pico e com dois picos. Quais as diferenças essenciais entre os dois gráficos que você fez? Uma delas é óbvia: uma distribuição tem um pico e a outra tem dois. Mas repare também no comportamento de P_{12} na posição $x = 0$. Note que P_{12} será máxima neste ponto se tiver um pico (na verdade, o pico ocorre precisamente em $x = 0$) ou será mínima se tiver dois picos. Como dissemos, o que distingue matematicamente estas duas situações é o sinal da derivada segunda. Assim, o valor limítrofe de d que separa estes dois regimes pode ser encontrado impondo a condição de derivada nula, ou seja, nem positiva nem negativa. Portanto, imponha a condição $\left. \frac{d^2 P_{12}}{dx^2} \right|_{x=0} = 0$ que você chegará na resposta depois de fazer um pouco de álgebra.

UMA EXPERIÊNCIA COM ONDAS

Vamos ver agora o que acontece quando usamos o mesmo aparato experimental para estudar o comportamento de ondas de água (e não mais de projéteis). O esquema da experiência está mostrado na **Figura 1.2**. No lugar do canhão, temos agora um dispositivo gerador de ondas circulares, uma *fonte de ondas*. Pode ser, por exemplo, um pequeno objeto que oscila para cima e para baixo na superfície da água. Temos ainda a parede com dois buracos e, mais adiante, um anteparo absorvedor de ondas, construído de modo que as ondas não sejam refletidas ao incidirem sobre ele (uma praia em miniatura, por exemplo). No anteparo absorvedor, coloca-se um pequeno detetor da intensidade das ondas, do qual podemos variar a posição x . Este detetor pode ser uma pequena bóia que oscila para cima e para baixo, ao sabor das ondas que chegam até ela. Lembre-se da Aula 11 de Física 2A: a intensidade da onda não é exatamente a amplitude da oscilação deste objeto, mas sim proporcional ao quadrado da amplitude!

O que observamos quando fazemos o experimento? Em primeiro lugar, observa-se que a onda que chega ao detetor pode ter qualquer intensidade. Ou seja, a bóia pode ser mover com qualquer amplitude, ainda que seja muito pequena. Este resultado é bastante diferente do que observamos com projéteis: partículas “chegam” ou “não chegam” em pacotes iguais, ou seja, com intensidades “discretas” ou “quantizadas”. Já as ondas chegam com qualquer intensidade, ou seja, a intensidade varia de forma “contínua”.

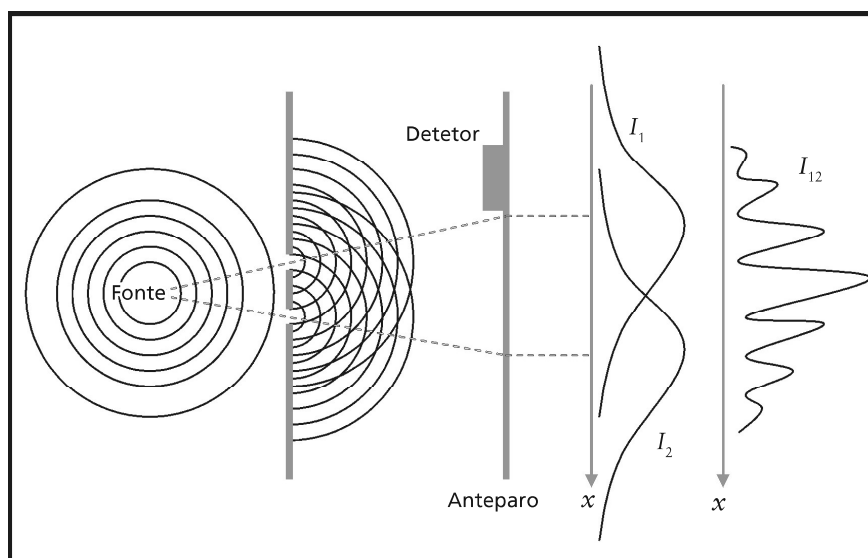


Figura 1.2: Esquema do experimento de fenda dupla com ondas. As intensidades I_1 e I_2 correspondem às situações onde apenas os buracos 1 ou 2 estão abertos, respectivamente. Já a intensidade I_{12} corresponde à situação em que os dois buracos estão abertos simultaneamente.

Quando medimos a intensidade da onda I_{12} em função da posição x do detetor, obtemos o gráfico mostrado na **Figura 1.2**. Note que a intensidade oscila fortemente com a posição, passando por valores máximos (picos) e mínimos (vales). Este gráfico nos é familiar dos nossos estudos em física ondulatória e ótica (Física 2A e Física 4A): trata-se do conhecido padrão de *interferência* por uma fenda dupla. Conceitualmente, ele pode ser entendido a partir da idéia de que os buracos atuam como geradores de novas ondas circulares, que interferem construtiva ou destrutivamente. Se tamparmos um dos buracos, a interferência desaparece. A curva I_1 da referida figura corresponde à situação em que apenas o buraco 1 é deixado aberto e, para a curva I_2 , apenas o buraco 2 é aberto. Note que estas curvas não têm as oscilações fortes da curva I_{12} , de modo que, claramente, notamos que $I_{12} \neq I_1 + I_2$.

Se $I_{12} \neq I_1 + I_2$, como podemos então obter matematicamente uma expressão para a intensidade I_{12} ? Lembre-se: quando há interferência, a função que representa a onda resultante é a soma das funções das ondas que a compõem. No caso de ondas na superfície da água, a função de onda apropriada é a altura do nível da água. Se soubermos a altura como função da posição e do tempo, teremos a informação completa sobre a propagação da onda. Assim, podemos representar a altura da onda que chega no detetor a partir do buraco 1 pela seguinte função:

$$h_1(x) = A_1(x)e^{i\omega t}, \quad (1.2)$$

onde x é a posição do detetor. O fator exponencial complexo $e^{i\omega t}$ dá conta da dependência temporal da altura, enquanto a amplitude A_1 é um número real e positivo, que depende da posição x . Como dissemos, a intensidade desta onda é proporcional a A_1^2 . Para nossa argumentação, não é necessário saber exatamente quanto vale o fator de proporcionalidade, de modo que podemos definir a intensidade desta onda simplesmente como

$$I_1 = A_1^2. \quad (1.3)$$

De forma semelhante, a altura h_2 da onda que chega no detetor a partir do buraco 2 é dada por:

$$h_2(x) = A_2(x)e^{i(\omega t + \delta)}. \quad (1.4)$$

Note que surge uma *diferença de fase* δ entre as duas ondas devido à diferença entre as distâncias percorridas desde os dois buracos até o ponto x . Da mesma forma, a intensidade é dada pelo quadrado da amplitude:

$$I_2 = A_2^2. \quad (1.5)$$

Na verdade, a altura deve ser uma quantidade real, de modo que altura da onda que vem do buraco 1 é, de fato, a *parte real de* $h_1(x)$. O mesmo vale para a onda 2. Mas usamos o já familiar artifício matemático de generalizar as funções de onda para valores complexos, de modo a facilitar as contas, tendo sempre o cuidado de tomar a parte real no final delas. Note que a intensidade é real, como deve ser!

Estamos agora prontos para obter a altura da onda resultante h_{12} . Basta somarmos as alturas das duas ondas:

$$h_{12}(x) = h_1(x) + h_2(x) = A_1(x)e^{i\omega t} + A_2(x)e^{i(\omega t + \delta)}. \quad (1.6)$$

É mais fácil fazer esta soma graficamente, usando o conceito de *fasores*, como você viu na Aula 19 de Física 4A. Isto está mostrado na **Figura 1.3**. A partir da lei dos cossenos, obtemos a intensidade da onda resultante:

$$I_{12} = A_{12}^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos \delta. \quad (1.7)$$

ou, em termos das intensidades:

$$I_{12} = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1I_2} \cos \delta. \quad (1.8)$$

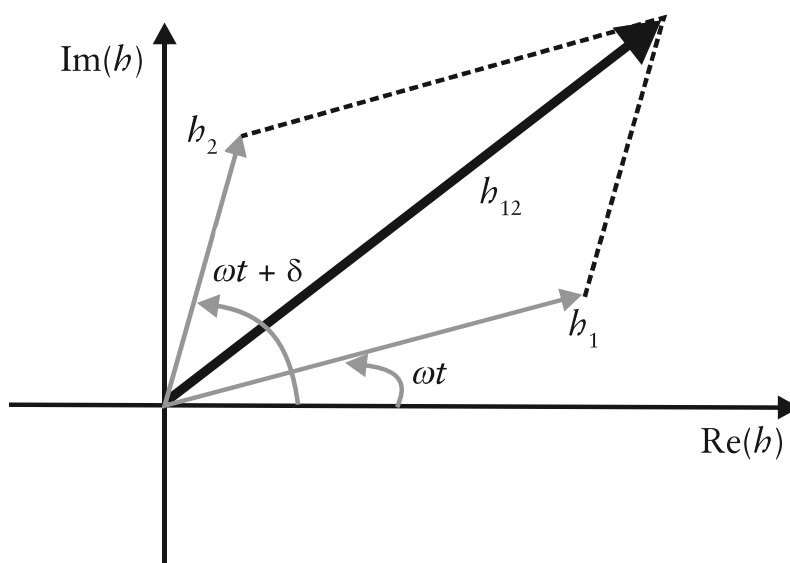


Figura 1.3: Esquema da soma das duas funções complexas h_1 e h_2 através de fasores.

O último termo é precisamente o *termo de interferência*. É por causa dele que $I_{12} \neq I_1 + I_2$.

Podemos, então, resumir nosso entendimento sobre o experimento da fenda dupla com ondas de água nos seguintes resultados principais: primeiro, a intensidade pode ter qualquer valor; segundo, há interferência.

Vamos recordar os conceitos mais importantes associados à interferência? Diz-se que há *interferência construtiva* quando a intensidade atinge um valor máximo (picos na curva I_{12}). Isto ocorre quando as ondas provenientes dos dois buracos estão em fase (ou seja, $\delta = 0$). Note que a intensidade da onda resultante é maior que a soma das intensidades das duas ondas! Geometricamente, esta condição é obtida quando a diferença entre as distâncias percorridas pelas duas ondas, desde os respectivos buracos até o detetor, for um múltiplo inteiro n do comprimento de onda λ :

$$|d_1 - d_2| = n\lambda \quad (\text{interferência construtiva})$$

Já a situação de *interferência destrutiva* corresponde aos mínimos de intensidade, ocorrendo quando as duas ondas estiverem fora de fase (ou, mais precisamente, com uma diferença de fase de π). Esta condição é obtida quando a diferença das distâncias percorridas for um múltiplo inteiro ímpar de um meio comprimento de onda:

$$|d_1 - d_2| = (2n + 1) \frac{\lambda}{2} \quad (\text{interferência destrutiva})$$

ATIVIDADE FINAL

Obtenha algebricamente a Equação (1.8) a partir da Equação (1.6).

RESPOSTA COMENTADA

Para chegar à resposta, você precisará apenas lembrar que $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ e, depois de chegar a uma expressão para h_{12} , obter seu módulo ao quadrado $|h_{12}|^2$.

RESUMO

Analizamos o experimento de fenda dupla realizado de duas formas distintas: uma com projéteis e a outra com ondas. Observamos que projéteis chegam ao detetor em pacotes idênticos e não apresentam interferência. Em contraste com este comportamento, as ondas podem ser detetadas com qualquer intensidade e apresentam interferência. Esses comportamentos são característicos das partículas e das ondas clássicas. Será interessante compará-los com o comportamento de partículas quânticas, o que faremos na próxima aula.

INFORMAÇÃO SOBRE A PRÓXIMA AULA

Na próxima aula, descreveremos o experimento de fenda dupla realizado com partículas quânticas, como elétrons.

Experiências com elétrons

AULA

2

Meta da aula

Descrever uma experiência de interferência por uma fenda dupla com partículas quânticas.

- analisar o comportamento de elétrons ao passar por uma fenda dupla;
- comparar este comportamento com o de projéteis e ondas, descritos na aula anterior desta disciplina;
- introduzir o conceito de interferência de elétrons.

Pré-requisitos

Para uma melhor compreensão desta aula, é importante a revisão dos seguintes conteúdos: interferência por uma fenda dupla com ondas (Aula 8 de Física 4A); fótons e dualidade onda-partícula (Aula 8 de Física 4B); ondas de matéria e o comprimento de onda de de Broglie (Aula 9 de Física 4B).

CONTADOR GEIGER

Instrumento usado para detectar elétrons ou outros tipos de partículas quânticas. É formado por um tubo de gás (normalmente argônio) que conduz a eletricidade quando uma partícula passa por ele, ionizando-o. O instrumento amplifica o sinal, produzindo um “clique” para cada partícula que passa pelo gás.

UMA EXPERIÊNCIA COM ELÉTRONS

Vamos ver agora o que acontece quando realizamos o mesmo experimento de fenda dupla, mas agora com elétrons. Para isso, usamos um canhão de elétrons. Este pode ser um fio metálico de tungstênio (como o filamento de uma lâmpada) que, quando aquecido, emite elétrons. Como nos dois experimentos descritos na aula anterior, os elétrons incidem sobre uma parede que tem dois buracos e atingem um anteparo no qual há um detector deslocável. Um detector para elétrons pode ser um **CONTADOR GEIGER** ou um multiplicador de elétrons que, conectado a um alto-falante, produz um ruído toda vez que for atingido por um elétron.

A primeira coisa que notamos é que a chegada dos elétrons no detector produz sons de “cliques” bem definidos, vindos do alto-falante. Se interpretamos um som de “clique” como sendo a chegada de um elétron no detector, quase todas as nossas observações levam a crer que os elétrons se comportam como projéteis:

- a. Todos os “cliques” são idênticos: não existem “meios-cliques”, por exemplo. Portanto, os *elétrons chegam em pacotes idênticos*.
- b. Os “cliques” acontecem de forma aleatória, ou seja, ouve-se algo como: clique.... clique..... clique-clique.. clique..... clique-clique-clique..... clique. A análise desse padrão parece indicar que o instante de chegada de cada elétron é imprevisível.
- c. Nunca escutamos dois “cliques” simultaneamente, mesmo que coloquemos vários detectores cobrindo totalmente o anteparo. Isso quer dizer que os elétrons chegam um de cada vez.
- d. Se aumentarmos a temperatura do fio, teremos mais elétrons chegando ao detector por unidade de tempo. Assim como fizemos com projéteis, podemos associar a taxa média de chegada dos elétrons à probabilidade de chegada, para cada posição x no anteparo.

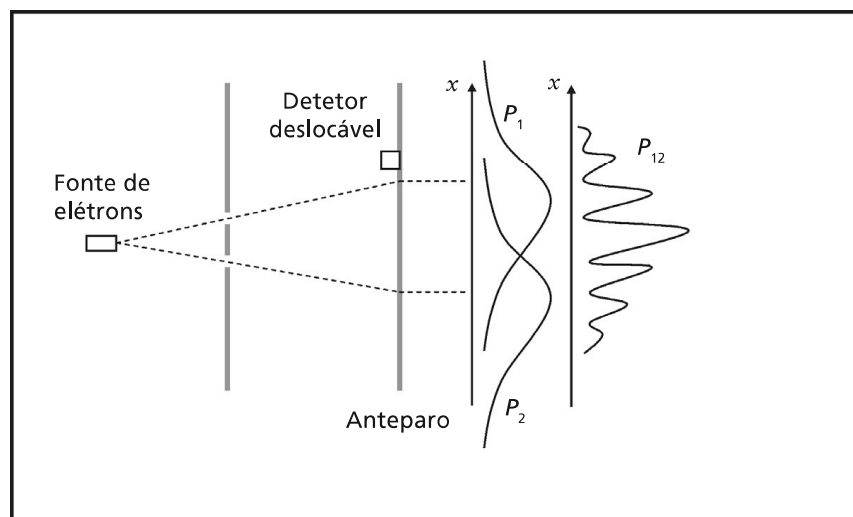


Figura 2.1: Esquema do experimento de fenda dupla com elétrons. As probabilidades P_1 e P_2 correspondem, respectivamente, às situações nas quais apenas os buracos 1 ou 2 estão abertos. Já a probabilidade P_{12} corresponde à situação em que os dois buracos estão abertos simultaneamente.

O que acontece então quando computamos esta probabilidade? Bem, todos os resultados descritos anteriormente parecem ser consistentes com o fato de o elétron ser um projétil, como uma pequeníssima bolinha de gude. Portanto, nada mais razoável do que esperar que observemos a mesma curva descrita na **Figura 1.1** da Aula 1 desta disciplina. Aliás, toda a nossa intuição clássica nos leva a pensar no elétron como uma “bolinha”. Pois bem, este é o momento crucial em que nossa intuição falha. A probabilidade P_{12} que medimos para o elétron está mostrada na **Figura 2.1**. Note que ela tem oscilações que não existiam no caso dos projéteis. De fato, elas lembram muito as oscilações que observamos no caso das ondas e que interpretamos como *interferência*.

Decididamente, o elétron não é uma “bolinha”...

INTERFERÊNCIA DE ONDAS DE ELÉTRONS

Mas como pode surgir um padrão de interferência de projéteis? Vimos, no caso das ondas, que há uma interferência entre as ondas que passam pelo buraco 1 e as que passam pelo buraco 2. As ondas passam ao mesmo tempo pelos dois buracos. Poderiam os elétrons que passam pelo buraco 1 estar interferindo de alguma forma com os que passam pelo buraco 2? Sabemos que os elétrons são partículas carregadas negativamente e que, portanto, devem interagir entre si de acordo com a Lei de Coulomb, como vimos na disciplina Física 3A. Poderia o padrão complicado de interferência surgir por meio da interação coulombiana ou, em outras palavras, a partir de um intrincado mecanismo de colisões entre os elétrons?

Podemos testar experimentalmente esta hipótese. Já dissemos que os elétrons chegam um de cada vez no anteparo. Mas talvez eles estejam sendo emitidos com uma taxa muito alta, de modo que possamos ter vários elétrons “em vôo” ao mesmo tempo e, portanto, interferindo uns nas trajetórias dos outros. Mas se reduzirmos bastante a temperatura do filamento, podemos diminuir cada vez mais a taxa de emissão de elétrons, até o limite em que tivermos certeza de que há *apenas um* elétron viajando de cada vez desde o emissor até o anteparo. Dessa forma, não há como ocorrer uma interação entre eles. Se fizermos o experimento, a taxa de detecção dos elétrons no anteparo realmente diminui bastante. Os “cliques” se tornam cada vez mais espaçados.

Mas, depois de deixarmos o experimento funcionando por um longo tempo, vai se formando, lentamente, o mesmo padrão de interferência que observamos anteriormente. Nada muda. Parece incrível, mas os elétrons passam um de cada vez pelos buracos e, ainda assim, interferem! É como se o elétron “interferisse com ele mesmo”!

Dizer que um elétron interfere com ele mesmo parece ser uma contradição. Afinal, a própria palavra “interferência” sugere a atuação de dois ou mais objetos no processo. Quem primeiro propôs esta expressão, propositalmente contraditória, para enfatizar a natureza não-intuitiva da interferência quântica, foi o físico inglês Paul Dirac. Na ocasião, ele se referia à experiência de fenda dupla realizada com fótons, as partículas de luz que foram apresentadas a você na Aula 8 de Física 4B. Mas a mesma idéia vale para elétrons também.

Na sua edição de setembro de 2002, a revista *Physics World* elegeu o experimento de fenda dupla com elétrons como o mais belo da história da Física! Veja este artigo em <http://physicsweb.org/articles/world/15/9/1>.

ATIVIDADE



1. Há vários *sites* na internet nos quais você pode explorar o experimento de fenda dupla de forma “virtual”. Um deles é:

<http://www.physik.uni-muenchen.de/didaktik/Computer/Doppelspalt/dslit.html>

Vamos aprender a interagir com este experimento virtual, pois ele será muito útil para nos ajudar a entender o fenômeno que estamos descrevendo. Siga os seguintes passos:

- a. Entre no *site* e inicie o programa.
- b. Você verá um quadro com retratos dos grandes nomes da Física Quântica. Selecione a linguagem que lhe é mais familiar e clique “ok”. O programa se iniciará imediatamente, abrindo uma janela.
- c. Você verá a montagem do experimento de fenda dupla, reproduzida na **Figura 2.2**. Esta montagem consiste em uma fonte de partículas, uma fenda dupla, uma lâmpada e um anteparo.

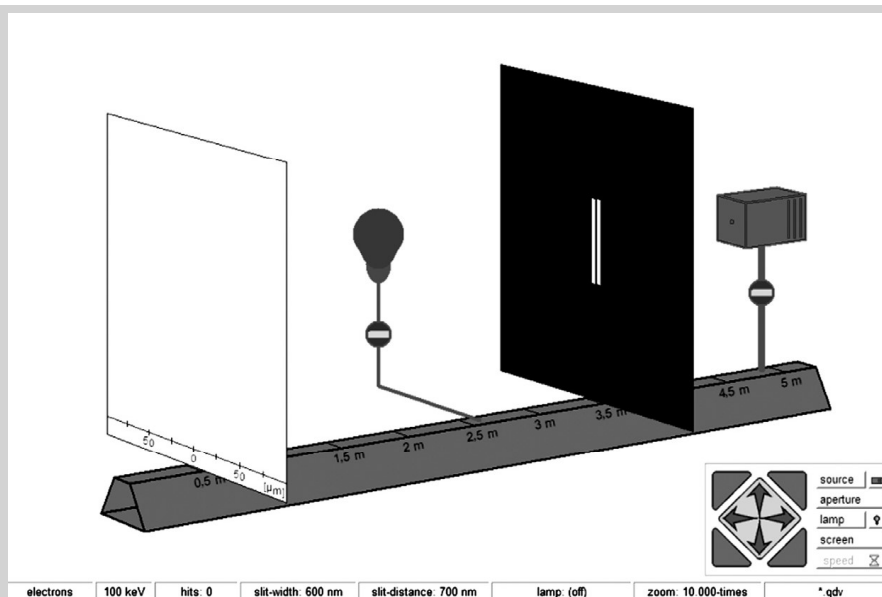


Figura 2.2: Montagem experimental e painel de controle do experimento virtual de interferência por uma fenda dupla.

d. No canto inferior direito da janela, você verá um pequeno painel de controle. Do lado esquerdo deste painel, há setas para posicionar o ângulo de visão do experimento da maneira que você achar melhor. Do lado direito, há vários botões de controle pequenos. Vamos descrevê-los um a um:

Fonte (source): Aqui você selecionará o tipo de partícula que irá jogar de encontro à fenda. Você pode optar por projéteis clássicos ou por diferentes partículas quânticas. Poderá também selecionar a energia das partículas que, no caso de partículas quânticas, está relacionada ao comprimento de onda das mesmas. O pequeno botão vermelho à direita do “Fonte” dá início à simulação.

Abertura (aperture): Controla as propriedades da fendas, como a largura das mesmas (*slit width*) e o espaçamento entre elas (*slit distance*). Pode-se também abrir ou fechar cada fenda separadamente.

Lâmpada (lamp): Com este botão, podemos controlar a intensidade e o comprimento de onda dos fótons que podemos fazer incidir nos elétrons para visualizar sua trajetória, como será descrito na próxima aula. À direita deste botão, o pequeno botão com a figura de uma lâmpada ativa o fluxo de fótons.

Anteparo (screen): Aqui você controla as diversas opções de visualização de seus resultados. A visualização normal corresponde a fazer aparecer na tela pequenos pontos vermelhos nas posições em que cada elétron incidiu no anteparo. Se a opção “resultado teórico” (*theo. result*) for ativada, aparecerá, em azul, a distribuição de probabilidades prevista teoricamente para aquelas condições do experimento. Se a opção “contagem” (*evaluation*) for acionada,

surgirá na tela um histograma, em vermelho, com a contagem do número de partículas que chegam em cada ponto do detetor. É possível ainda combinar as opções “resultado teórico” e “contagem”, para que elas apareçam simultaneamente na simulação. Há ainda botões para controlar a ampliação (*zoom*), apagar os resultados para iniciar uma nova simulação (*reset*) e para guardar fotografias de seus resultados em arquivos (*photos*).

Depois dessa longa (mas necessária) explicação sobre o funcionamento do experimento virtual, você deve estar ansioso para fazer sua primeira simulação. Está pronto? Então vamos lá: selecione a fonte para “elétrons” com energia cinética de 100 keV, correspondendo a um comprimento de onda de 4 pm (vamos relembrar, ainda nesta aula, como se relaciona a energia do elétron a seu comprimento de onda). Ajuste a largura das fendas para 400 nm e a distância entre as mesmas para 700 nm. Deixe a lâmpada desligada. Inicie o experimento e veja o que acontece.

RESPOSTA COMENTADA

Observe que os elétrons colidem um de cada vez com o anteparo. Mas, gradualmente, surgirá na tela o padrão de interferências! Não é interessante?

Ora, mas se os elétrons são pacotes *idênticos e indivisíveis*, poderíamos dizer que, diferentemente das ondas, eles passam ou por um buraco ou pelo outro, e não pelos dois ao mesmo tempo, certo? Está aí uma hipótese que poderíamos testar:

Hipótese A: *Cada elétron passa ou pelo buraco 1 ou pelo buraco 2.*

Pela nossa intuição com partículas clássicas, nada parece mais certo do que isso. Supondo que isto seja correto, todos os elétrons que atingem o anteparo se dividem em dois grupos: aqueles que passaram pelo buraco 1 e aqueles que passaram pelo buraco 2. Se isto for verdade, a curva P_{12} deve ser obtida pela soma de duas curvas: P_1 , ou seja, a distribuição de probabilidades computada usando apenas os elétrons que passaram pelo buraco 1, e P_2 , idem para o buraco 2. Será que podemos fazer este experimento? Bem, parece fácil: basta fechar um dos buracos de cada vez e repetir o experimento, como fizemos com os projéteis na aula passada.



ATIVIDADE

2. Vamos retornar ao nosso experimento virtual. Agora deixe apenas uma das fendas aberta. Observe o que acontece.

RESPOSTA COMENTADA

*Veja que as oscilações rápidas que caracterizam a interferência desaparecem. Porém, perceba que algumas oscilações de menor periodicidade permanecem. Elas ocorrem devido à difração dos elétrons pela fenda que está aberta, do mesmo modo que ocorre com a luz (lembre-se da Aula 8 de Física 4A). Não nos preocupamos muito com a difração porque queríamos concentrar nossa atenção no fenômeno da interferência. Por isso, as curvas P_1 e P_2 da **Figura 2.1** não mostram as oscilações de difração. Estas são curvas apenas esquemáticas. De fato, a difração existe e é também uma manifestação da natureza ondulatória dos elétrons, mas no momento ela não é importante para a nossa argumentação. Porém, é preciso deixar este ponto bem esclarecido.*

Bem, fizemos o experimento e o resultado está reproduzido esquematicamente na **Figura 2.1**. Espere um minuto. Nosso resultado experimental mostra que $P_{12} \neq P_1 + P_2$!

Tudo parece muito misterioso. Elétrons chegam em “pacotes” e, ainda assim, exibem interferência típica das ondas. Este é um dos mistérios fundamentais da mecânica quântica: a *dualidade onda-partícula*, que você estudou na Aula 8 de Física 4B, no contexto do fóton. Como o físico americano Richard Feynman sugeriu no início deste módulo, vamos deixar de lado as tentativas de entender esse mistério. Tenha certeza de que muitos físicos famosos dedicaram boa parte de suas vidas tentando fazê-lo, sem sucesso. Vamos apenas *aceitá-lo* e explorá-lo um pouco mais. Ainda vamos descobrir coisas muito interessantes em consequência dele!

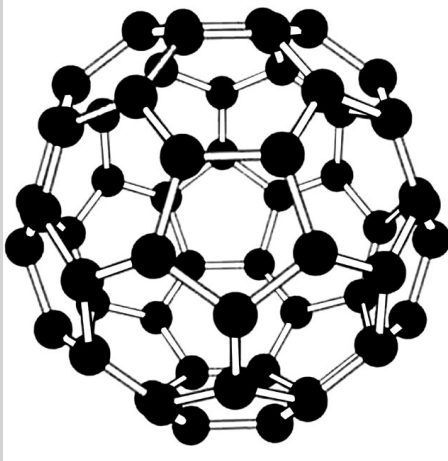


Figura 2.3: Uma molécula de C_{60} , ou *buckyball*, formada por 60 átomos de carbono dispostos de forma idêntica a uma bola de futebol.

A experiência de interferência de elétrons por uma fenda dupla foi realizada pela primeira vez por Claus Jönsson, em 1961. Mais recentemente, em 1991, Carnal e Mlynek realizaram a mesma experiência com átomos em vez de elétrons. Sim, átomos, que são milhares de vezes mais pesados que os elétrons, e ainda assim são partículas quânticas. Surpreso? Pois bem, em 1999, Arndt e colaboradores viram interferência de fenda dupla com moléculas de C_{60} , também chamadas de *buckyballs*. Estas moléculas, mostradas na **Figura 2.3**, contêm 60 átomos de carbono, dispostos como se formassem uma bola de futebol. São centenas de milhares de vezes mais pesadas que um elétron. Então, qual o limite que separa o mundo clássico do mundo quântico? Será que um dia poderemos ver interferência entre bolas de futebol de verdade? Voltaremos a esta questão em breve.

Se $P_{12} \neq P_1 + P_2$, haverá alguma outra maneira de obtermos P_{12} a partir de P_1 e P_2 ? Surpreendentemente, a resposta é bastante simples. Basta usarmos a matemática das ondas, que relembramos na aula passada. Note que a curva P_{12} é muito parecida com a curva de intensidades I_{12} que obtivemos na Aula 1 para as ondas. Como no caso das ondas, a intensidade não é a quantidade fundamental, mas sim a função de onda. Lembre-se: para ondas na superfície da água, a *função de onda* mais conveniente era a da altura do nível da água, que consideramos como uma variável complexa, para facilitar a matemática.

Vimos na Aula 9 de Física 4B que o físico francês Pierre de Broglie foi o primeiro a associar uma onda ao elétron. Na ocasião, chamamos essas ondas de “ondas de matéria”. Segundo de Broglie, um elétron (ou qualquer partícula microscópica) que se desloca com momento linear p tem associada a si uma onda com comprimento de onda λ tal que:

$$\lambda = \frac{h}{p}, \quad (2.1)$$

onde $h = 6,63 \times 10^{-34}$ J.s é a constante de Planck. Iremos mais a fundo nesta idéia e vamos supor que o elétron é descrito por uma função de onda complexa ψ . Cada situação corresponde a uma função de onda diferente: se apenas o buraco 1 estiver aberto, teremos a função de onda ψ_1 ; se apenas o buraco 2 estiver aberto, teremos a função de onda ψ_2 ; e se ambos os buracos, 1 e 2, estiverem abertos, teremos a função de onda ψ_{12} . Em analogia com as ondas, temos $\psi_{12} = \psi_1 + \psi_2$. A partir daí, como podemos obter a probabilidade? Você se lembra do caso das ondas, onde a intensidade era proporcional ao quadrado da amplitude da onda? Algo análogo ocorre com o elétron, sendo que agora *a probabilidade é proporcional ao módulo quadrado da função de onda*. Como fizemos com as ondas na aula anterior, ignoramos, por enquanto, o coeficiente de proporcionalidade e escrevemos:

$$\begin{aligned} P_1 &= |\psi_1|^2 \\ P_2 &= |\psi_2|^2 \\ P_{12} &= |\psi_1 + \psi_2|^2 \end{aligned} \quad (2.2)$$

Diz-se que a função de onda de uma partícula quântica é uma amplitude de probabilidade.

Lembre-se: para calcular o módulo ao quadrado de um número complexo, multiplica-se o número pelo seu complexo conjugado, ou seja, $|\psi|^2 = \psi\psi^*$. Repare que $|\psi|^2$ deve ser um número real e positivo. Afinal, toda probabilidade que se preza deve ser real e positiva.

Como se vê, a matemática das ondas nos explica naturalmente o resultado encontrado no experimento, pois dela surge naturalmente o fenômeno de interferência. Mas então, se a soma dos efeitos de cada um dos buracos é diferente do efeito conjunto dos dois buracos abertos, a Hipótese A está incorreta! Não é verdade que os elétrons passam por um buraco ou pelo outro. Mas como pode ser isto, se eles chegam em pacotes? Será que eles fazem algo complicado, como se dividir em dois, passar pelos buracos e depois se juntar novamente em um só? Somos tentados a imaginar qualquer coisa, por mais absurda que seja, para salvar os conceitos clássicos de partícula e trajetória, bastante consolidados em nossa intuição física. Esta nos parece tão afrontada que não resistimos: temos de fazer um outro experimento para testar a Hipótese A. Será que não é possível observar os elétrons e ver por onde eles passam? Faremos isso na próxima aula.

ATIVIDADE FINAL

1. Vamos estudar de forma mais quantitativa a interferência de elétrons. Vamos supor que nossa fonte emita elétrons com energia cinética de 10eV.

a. Qual o comprimento de onda da onda associada aos elétrons?

b. Suponha agora que os dois buracos são fontes de ondas circulares, exatamente como na experiência de interferência de luz descrita na Aula 8 de Física 4A. Reproduzimos a seguir a **Figura 8.5** daquela aula, que descreve a geometria do problema.

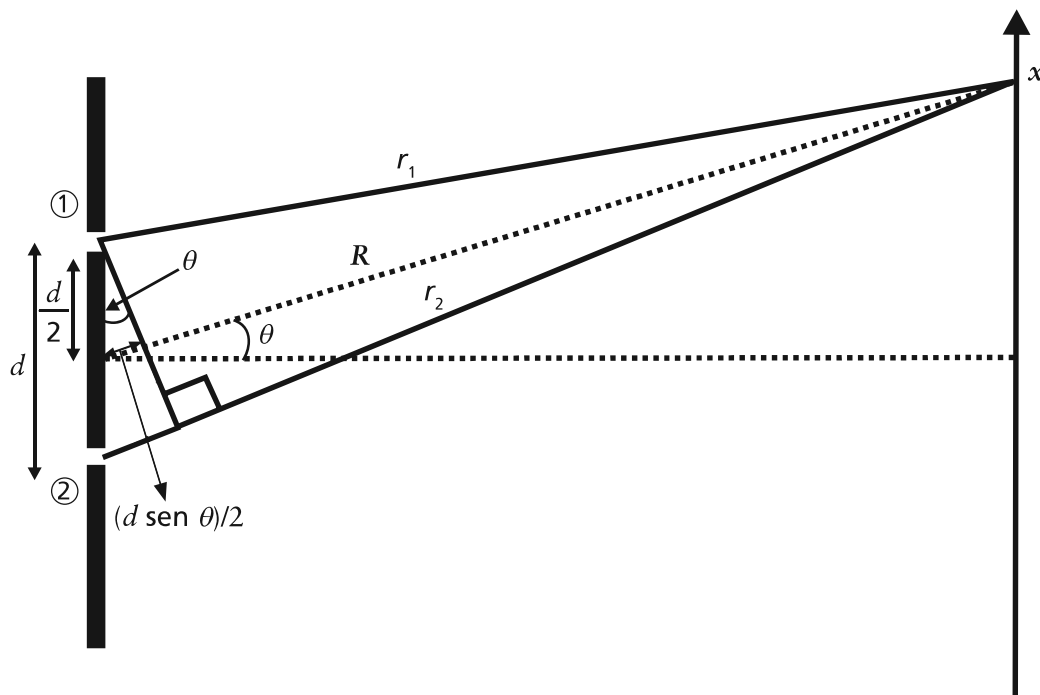


Figura 2.4: Descrição geométrica da experiência de fenda dupla.

Por analogia com aquela situação (veja a Equação (8.18) da Aula 8 de Física 4A), podemos propor as seguintes expressões para as funções de onda ψ_1 e ψ_2 no ponto x :

$$\psi_1 = Ae^{ikr_1}; \psi_2 = Ae^{ikr_2} , \quad (2.3)$$

onde A é uma constante. Usando as relações geométricas $r_1 \approx R - \frac{d}{2} \sin\theta$ e $r_2 \approx R - \frac{d}{2} \sin\theta$, e expressando $\sin\theta$ em termos da coordenada x , obtenha ψ_1 e ψ_2 em função de x . Dica: Use o limite $R \gg d$, onde $\sin\theta \approx \tan\theta$.

c. Calcule as probabilidades P_1 , P_2 e P_{12} em função de x . O que você pode comentar sobre o seu resultado?

d. Tome os valores numéricos $d = 1\text{mm}$ e $R = 1\text{m}$. Qual é a distância entre dois máximos consecutivos de probabilidade no padrão de interferência?

e. Repita o item (d) para uma molécula de C_{60} e para uma bola de futebol de cerca de 1kg . Nos dois casos, considere que a energia cinética não se altera, sendo ainda 10eV (ainda que seja muito difícil imprimir uma energia cinética tão baixa a uma bola de futebol!). Considere apenas a variação na massa. Você agora consegue entender por que a manifestação interferência quântica se torna impossível com objetos macroscópicos?

RESPOSTA COMENTADA

Inicialmente, no item a, você terá de encontrar o comprimento de onda dos elétrons, usando a relação de de Broglie ($\lambda = h/p$) e a relação entre momento linear e energia cinética de uma partícula ($E = p^2/2m$). Tome cuidado com a conversão de unidades!

No item b, você deverá usar a aproximação $\sin\theta \approx d/R$ (você consegue entender por quê?) e chegar ao seguinte resultado:

$$\psi_1 = Ae^{ikR} e^{-iqx}; \quad \psi_2 = Ae^{ikR} e^{iqx}, \quad \text{onde } q = \frac{kd}{2R}.$$

No item c, usando a receita da Equação (2.2), você chegará ao resultado $P_1 = P_2 = |A|^2$, ou seja, a probabilidade é constante, não depende de x . Assim, não há as oscilações típicas de interferência. Mas você pode agora estar confuso, pois as probabilidades P_1 e P_2 mostradas na **Figura 2.1** não são constantes, e sim curvas com forma de sino. Não se preocupe com este ponto. A razão disso é que o caminho que leva às expressões (2.3) envolve algumas aproximações. Estas aproximações estão melhor descritas na Aula 8 de Física 4A. Mais uma vez, o ponto que queremos enfatizar é que não aparecem as oscilações de interferência.

No entanto, essas oscilações aparecem claramente na distribuição de probabilidades, no caso de ambos os buracos estarem abertos. Você deve encontrar $P_{12} = 4|A|^2 \cos^2(qx)$. No item d, usando os valores numéricos propostos, você deverá encontrar algo da ordem de $0,1\text{mm}$ para distâncias entre máximos consecutivos de probabilidade. É pequeno, mas mensurável.

Em contrapartida, no item e, você verá que essas distâncias se tornam muito pequenas quando a massa da partícula aumenta. No caso de C_{60} , você deve encontrar distâncias cerca de mil vezes menores que no caso de elétrons. No caso de uma bola de futebol, a distância entre máximos consecutivos é menor por um fator 10^{-17} em comparação com o caso eletrônico, tornando-se impossível de ser medida!

Explore um pouco mais o experimento virtual de interferência por uma fenda dupla descrito nesta aula. Entre no *site* e brinque um pouco com ele, explorando e modificando os diversos parâmetros, tentando entender os resultados de cada experimento.

RESUMO

Partículas microscópicas, como elétrons, têm um comportamento peculiar ao passar por uma fenda dupla. Este comportamento é diferente tanto de projéteis como de ondas. Ele tem características de ambos, o que designamos como *dualidade onda-partícula*. É necessário aprender também a usar a matemática das ondas para calcular as probabilidades de encontrar o elétron em determinadas posições do espaço.

INFORMAÇÃO SOBRE A PRÓXIMA AULA

Na próxima aula, tentaremos mais uma vez fazer uma medida da trajetória dos elétrons, ou seja, procuraremos determinar por qual buraco eles passam. Veremos que isto vai nos levar a efeitos muito interessantes!

O Princípio da Complementaridade e o papel do observador na Mecânica Quântica

AULA

3

Metas da aula

Descrever a experiência de interferência por uma fenda dupla com elétrons, na qual a trajetória destes é observada por partículas de luz (fótons), e discutir o Princípio da Complementaridade e o papel do observador na Mecânica Quântica.

objetivos

- analisar o desaparecimento do padrão de interferência de elétrons, quando tentamos observá-los com fótons;
- rever o conceito de fótons, as partículas de luz;
- discutir o Princípio da Complementaridade;
- discutir o papel do observador na Mecânica Quântica.

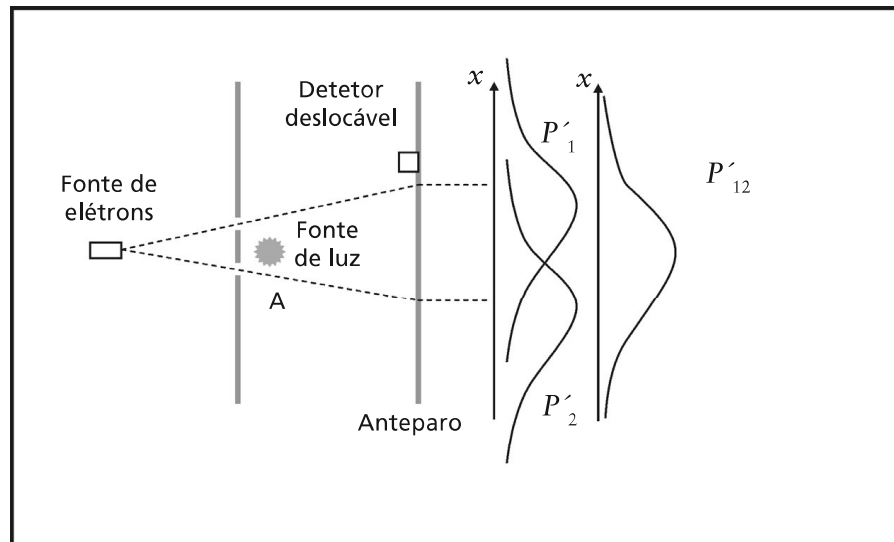
Pré-requisitos

Para uma melhor compreensão desta aula, é importante que você revise: fótons e dualidade onda-partícula (Aula 8 de Física 4B); ondas de matéria e o comprimento de onda de de Broglie (Aula 9 de Física 4B).

OBSERVANDO OS ELÉTRONS

Como prometemos na Aula 2, vamos agora modificar um pouco nosso experimento para tentar observar os elétrons. Atrás da parede com fenda dupla, introduzimos uma fonte de luz muito brilhante, como mostra a **Figura 3.1**. Sabemos que os elétrons espalham a luz, de maneira que veremos um *flash* luminoso toda vez que um elétron passar próximo à fonte de luz. Se o *flash* estiver vindo das proximidades do buraco 2, como por exemplo do ponto *A* da **Figura 3.1**, saberemos que o elétron passou pelo buraco 2. Idem para o buraco 1. Se virmos *flashes* simultâneos vindos das proximidades dos dois buracos, poderemos concluir que o elétron se dividiu em dois. Parece simples, vamos então fazer o experimento!

Figura 3.1: Esquema do experimento de fenda dupla com elétrons sendo observados por fótons. As probabilidades P'_1 e P'_2 correspondem às situações nas quais apenas os buracos 1 ou 2 estão abertos, respectivamente. Já a probabilidade P'_{12} corresponde à situação em que os dois buracos estão abertos simultaneamente.



ATIVIDADE



1. Vamos voltar ao nosso experimento virtual da fenda dupla descrito na Aula 2. Ajuste as condições do experimento de forma idêntica ao que foi feito na Atividade 1 da Aula 2, com uma única diferença: ajuste a lâmpada, para que ela tenha uma intensidade máxima (100%) e um comprimento de onda de 380nm (cor azul). Execute o experimento com a lâmpada ligada. O que você observa?

RESPOSTA

Veja que a interferência desaparece quando ligamos a lâmpada!

O que aconteceu? Se pudéssemos analisar o experimento com mais detalhe, iríamos observar que sempre que ouvimos um “clique” do nosso detector, não importa onde ele esteja, vemos também um *flash* vindo do buraco 1 *ou* do buraco 2, mas nunca dos dois ao mesmo tempo. Ficamos um pouco aliviados: seria mesmo um pouco complicado descrever um elétron que se divide. Concluimos, por esse experimento, que a hipótese A é correta, ou seja, que os elétrons passam por um buraco ou pelo outro! Mas espere um minuto... Na aula passada, tínhamos concluído exatamente o oposto, a partir da análise das probabilidades (ou seja, que $P_{12} \neq P_1 + P_2$).

Vamos então computar novamente as probabilidades, desta vez com a nossa fonte de luz ligada. Cada vez que um elétron chega ao detector, olhamos a posição do *flash* para sabermos por onde ele passou. Assim, podemos computar duas curvas de probabilidade: P'_1 (contendo apenas os elétrons que passaram pelo buraco 1) e P'_2 (contendo apenas os elétrons que passaram pelo buraco 2). Essas curvas estão mostradas na **Figura 3.1**. Note que elas são bem parecidas com as curvas P_1 e P_2 , que computamos na Aula 2, fechando um dos buracos de cada vez. De fato, as curvas são idênticas, ou seja, $P'_1 = P_1$ e $P'_2 = P_2$. Isto é ótimo! Significa que não faz diferença a maneira como determinamos por qual buraco o elétron passa, o resultado final é o mesmo. Ou seja, não importa se essa determinação é feita bloqueando um dos buracos ou observando a trajetória do elétron com luz, pois obteremos o mesmo resultado para as distribuições de probabilidade. Temos a sensação de que estamos aos poucos “domando” nosso experimento.

Mas o que obtemos agora para a probabilidade total P'_{12} ? Na verdade, é bem simples obtê-la, basta somarmos: $P'_{12} = P'_1 + P'_2 = P_1 + P_2$. É como se fizéssemos de conta que não prestamos atenção no *flash* que indica por qual buraco o elétron passou. A distribuição de probabilidades total é também mostrada na **Figura 3.1**. Ora, então concluimos que, *quando observamos os elétrons, o padrão de interferência desaparece!* Se desligamos a fonte de luz, a interferência volta a existir.

Como pode acontecer isto? A luz parece alterar o movimento dos elétrons de alguma forma, pois com luz eles se distribuem de uma forma no anteparo, sem luz, de outra forma. É como se os elétrons fossem muito delicados, e a luz desse um “empurrão” neles, quando o *flash* fosse produzido, alterando seu movimento. Isso faz algum sentido, pois, como sabemos, a luz é uma onda eletromagnética, e o campo elétrico da luz pode produzir uma força no elétron.

Bem, talvez possamos usar uma fonte de luz não tão brilhante. Pode ser que, diminuindo a intensidade da luz, possamos diminuir o “empurrão” que ela dá no elétron, recuperando assim o padrão de interferência e, ainda assim, observarmos o buraco por onde passa o elétron. Vamos tentar?

Diminuindo cada vez mais a intensidade da luz, observamos um efeito interessante. Nem todos os elétrons que chegam ao anteparo têm sua trajetória marcada por um *flash*. Alguns passam sem serem vistos. Porém, *todos os flashes que ocorrem têm a mesma intensidade*. Interessante... Você se lembra do conceito de fóton, que foi introduzido na Aula 8 de Física 4B? Naquela ocasião, já sabíamos que a luz era uma onda, mas aprendemos que ela também pode se comportar como um “pacote” ou partícula, da mesma forma que os elétrons. Essas partículas de luz são chamadas fótons. Quando diminuimos a intensidade da luz, reduzimos a taxa em que os fótons são emitidos. É por isso que às vezes os elétrons passam sem serem vistos. Provavelmente, não havia um fóton nas proximidades dos buracos, quando eles passaram. Mas cada fóton é idêntico aos demais. Por isso, produzem o mesmo *flash*, quando esbarram nos elétrons.

Bem, vamos levar adiante o experimento com a luz de intensidade reduzida. Desta vez, podemos classificar os elétrons em três tipos: (1) aqueles que são vistos passar pelo buraco 1; (2) aqueles que são vistos passar pelo buraco 2; (3) e aqueles que não são vistos. Ao computarmos as distribuições de probabilidades para cada um dos três tipos de elétrons, encontramos o seguinte: os elétrons do tipo 1 se distribuem como P'_1 , os do tipo 2 se distribuem como P'_2 e os do tipo 3 (aqueles que não são vistos) se distribuem como P_{12} , ou seja, com interferência. Bem, parece ser esta a conclusão de nosso experimento: *elétrons que são vistos não mostram interferência, elétrons que não são vistos mostram interferência*. Parece ser impossível, reduzindo a intensidade da luz, observar os elétrons e ao mesmo tempo manter o padrão de interferência.



ATIVIDADE

2. Verifique, no experimento virtual, o fenômeno que acabamos de discutir. Para isso, reduza a intensidade da luz para 50% e execute o experimento novamente.

RESPOSTA COMENTADA

Você verá que o padrão observado na tela parece ser uma mistura dos padrões com interferência e sem interferência. Isso corresponde exatamente ao que discutimos anteriormente, ou seja, elétrons que são observados não interferem, enquanto os elétrons que não são observados interferem.

A dificuldade essencial é que, ao reduzirmos a intensidade da luz, não reduzimos a “intensidade” de cada fóton ou, de forma mais precisa, a energia que ele transporta. Apenas reduzimos o número de fótons. Como é possível reduzir a energia de cada fóton? Como vimos na Aula 8 de Física 4B, uma das primeiras hipóteses da teoria quântica diz que a energia de cada fóton é proporcional à frequência da onda associada a ele:

$$E = h\nu, \quad (2.1)$$

onde ν é a frequência da luz e h é a constante de Planck. Por exemplo, fótons de luz vermelha (frequência menor) têm energia menor do que fótons de luz azul (frequência maior). Eis então uma saída possível para o nosso enigma: em vez de diminuirmos a intensidade da luz, vamos mudar sua cor. Assim, os fótons terão energia e momento linear menores e vão dar “empurrões” menores nos elétrons. Quem sabe poderemos chegar a uma situação em que os elétrons poderão ser vistos e, ainda assim, mostrar interferência?

Voltamos ao laboratório. Fazemos o experimento. Iniciamos com luz de alta frequência (pequeno comprimento de onda): como antes, enxergamos os elétrons passar pelos buracos 1 ou 2, mas não há interferência. Vamos, gradualmente, diminuindo a frequência da luz (aumentando seu comprimento de onda) até um certo ponto em que

recuperamos o padrão de interferência. Tudo parece funcionar bem. Mas quando olhamos agora para os *flashes*, temos uma surpresa desagradável. Continuamos a vê-los, mas eles agora estão maiores, mais difusos, como grandes borrões. Tão grandes que não conseguimos dizer se vêm da região do buraco 1 ou do buraco 2! Ou seja, ao tentarmos usar fótons de baixa energia, de modo que eles não atrapalhem o movimento dos elétrons, esses fótons não permitem uma definição da trajetória do elétron.

Desistimos...

O que aconteceu? Na verdade, este é um efeito familiar da ótica. Se temos dois objetos muito próximos, eles só são distinguíveis entre si se forem observados com uma luz de comprimento de onda menor que a distância entre eles. Caso contrário, os dois objetos aparecerão juntos, como um borrão, sem que possamos distingui-los. Diz-se, então, que não temos *resolução* para identificar os dois objetos separadamente.

Esta é a razão fundamental pela qual os microscópicos óticos têm um poder de aumento limitado. Não importa o quão poderoso seja o sistema de lentes destes aparelhos, sua capacidade de amplificação está fundamentalmente limitada pelo comprimento da luz visível, ou seja, não é possível distinguir objetos ou características menores que este comprimento de onda. Mas você já deve ter ouvido falar que os microscópios eletrônicos têm maior poder de aumento que os microscópios óticos, certo? E agora você pode entender como isto ocorre. Como estamos percebendo, os elétrons se comportam como ondas, e essas ondas podem ter comprimento de onda muito menor que o da luz visível, permitindo que possamos “enxergar” objetos muito menores com essas ondas eletrônicas.

O PRINCÍPIO DA COMPLEMENTARIDADE E O PAPEL DO OBSERVADOR NA MECÂNICA QUÂNTICA

As conclusões finais do nosso experimento são as seguintes:

1. Elétrons são descritos por *funções de onda* ψ que fornecem a *amplitude de probabilidade* de que certos eventos aconteçam. A probabilidade é dada pelo módulo quadrado da função de onda:

$$P = |\psi|^2.$$

2. Quando um evento pode ocorrer de duas formas distintas, a função de onda é dada pela soma das funções de onda correspondentes a cada uma das possibilidades: $\psi = \psi_1 + \psi_2$, e a probabilidade é dada por $P = |\psi_1 + \psi_2|^2$. Portanto, há *interferência*.

3. Quando fazemos uma medida que permita determinar de qual das duas maneiras o evento ocorreu, perdemos a interferência, e a probabilidade é dada por $P = P_1 + P_2$.

Esta última conclusão merece uma discussão mais profunda. Você se lembra de que falamos sobre a dualidade onda-partícula, isto é, que os objetos quânticos apresentavam características tanto de partículas como de ondas? Pois bem, há um outro princípio quântico relacionado a este conceito: o *Princípio da Complementaridade*, enunciado pela primeira vez pelo físico dinamarquês Niels Bohr. Segundo ele, as características de onda e partícula são complementares e nunca se manifestam simultaneamente, ou seja, se fizermos um experimento no qual fique claramente caracterizada a natureza ondulatória de um objeto quântico, suas características de partícula não irão se manifestar; e vice-versa. No caso da experiência da fenda dupla, assim que conseguimos determinar a trajetória (um conceito típico das partículas) do elétron, o padrão de interferências (um conceito típico das ondas) desapareceu completamente.

Toda esta discussão traz consigo aspectos interessantes no que se refere ao papel do observador na Mecânica Quântica. Ao observarmos a trajetória do elétron, destruimos sua natureza ondulatória. Na Física clássica, sempre imaginamos o “observador”, isto é, a pessoa que realiza o experimento, como um ente passivo, que não interfere com o objeto de medida. É assim, por exemplo, quando observamos as estrelas no céu: elas não alteram seu movimento por causa de nossa observação. Porém, na Mecânica Quântica, o observador adquire um papel “ativo” e fundamental para a teoria. Torna-se impossível realizar uma medida sem interferir com o objeto que estamos medindo. A medição destrói a interferência quântica, causando o chamado “colapso da função de onda”. Assim, o efeito de observar o estado do sistema faz, como conseqüência, que esse estado seja alterado. É importante enfatizar que isso ocorre não apenas no caso do elétron passando pela fenda dupla, mas com todos os sistemas quânticos. Dessa forma, na Física Quântica, a distinção entre observador e observado deixa de ser clara; deve-se considerar que o observador é também um sistema físico que interage com o objeto de medida.

A interpretação probabilística e do papel do observador na Física Quântica que descrevemos aqui é conhecida como *interpretação de Copenhague*, e seu principal formulador e defensor foi o físico dinamarquês Niels Bohr. Essa é a interpretação aceita pela grande maioria dos físicos hoje em dia. Mas sempre houve físicos que discordaram dessa interpretação, entre eles ninguém menos que Albert Einstein. Segundo este, “a crença em um mundo exterior independente do observador é a base de toda a ciência natural”.

Os debates entre Bohr e Einstein sobre esse e outros aspectos da Física Quântica são uma das páginas mais interessantes da Física e de seus aspectos filosóficos. Você pode aprender mais sobre esses debates em http://en.wikipedia.org/wiki/Bohr-Einstein_debates, por exemplo.

Intrigante a Mecânica Quântica, não? É certamente uma das disciplinas mais fascinantes de toda a Física. Nas próximas aulas, entraremos a fundo em seus aspectos mais formais. Com isso, iremos nos capacitar para prosseguir em nossa exploração do mundo quântico.

RESUMO

Podemos utilizar fótons para visualizar a trajetória dos elétrons, quando estes passam por uma fenda dupla. Mas, quando isso acontece, a natureza ondulatória dos elétrons, caracterizada pelo padrão de interferência, desaparece completamente. Entendemos isso como uma manifestação do Princípio da Complementaridade.

INFORMAÇÃO SOBRE A PRÓXIMA AULA

Na próxima aula, iniciaremos nosso estudo dos aspectos mais formais da Mecânica Quântica, enunciando seus postulados fundamentais.

Função de onda e Equação de Schrödinger

AULA

4

Meta da aula

Introduzir a função de onda e a Equação de Schrödinger.

objetivos

- interpretar fisicamente a função de onda;
- obter informação sobre um sistema microscópico, a partir da função de onda.

Pré-requisito

Para uma melhor compreensão desta aula, é preciso que você reveja o conceito de equações em derivadas parciais, tais como a equação de ondas, vista na Aula 11 de Física 2B.

FUNÇÃO DE ONDA E EQUAÇÃO DE SCHRÖDINGER

Vimos, nas aulas do Módulo 1 desta disciplina, que as partículas microscópicas, como os elétrons, não se movem seguindo as leis clássicas do movimento, dadas pela Mecânica Newtoniana. Essas partículas, porém, seguem outras leis que parecem ser mais apropriadas para a propagação de ondas. Isso ficou claro, de forma qualitativa, na Aula 2, na qual vimos surgir um padrão de interferência, quando um feixe de elétrons passa através de uma fenda dupla. Neste módulo, iniciaremos um estudo *quantitativo* da dinâmica das partículas quânticas, por meio de seus postulados e de sua formulação matemática precisa. Afinal, quais são as leis que regem o movimento das partículas microscópicas?

Vamos considerar uma partícula microscópica (por exemplo, um elétron) que se movimenta em três dimensões. Vamos aceitar, como postulado, que o estado dessa partícula, em um instante de tempo t , é completamente definido por uma quantidade complexa chamada *função de onda*, e indicada pelo símbolo $\Psi(x,y,z,t)$, em que (x,y,z) são as coordenadas espaciais.

O que queremos dizer com a expressão “estado de uma partícula”? Na mecânica clássica, o estado de uma partícula é conhecido por meio de sua posição e de sua velocidade em um determinado instante. Este conhecimento, somado ao conhecimento da força (ou, se preferirem, da energia potencial) que atua sobre esta partícula, permite a descrição completa da sua trajetória subsequente através da integração da 2ª Lei de Newton. Já um movimento ondulatório, como vimos no Módulo 1, será totalmente conhecido, se soubermos a dependência espacial e temporal da função de onda. Por exemplo, no caso de ondas na superfície da água, vimos que uma função de onda apropriada era a altura do nível da água. Note que, no caso das partículas quânticas, a descrição matemática é muito mais parecida com a das ondas do que com a das partículas clássicas.

Como vimos na Aula 11 de Física 2B, no caso de ondas clássicas, a função de onda é a solução de uma equação em derivadas parciais conhecida como equação da onda. Então, é razoável supor que a função de onda de uma partícula quântica deve também satisfazer a uma *equação de onda*. Que equação é esta? Veremos a seguir.

Suponha que a partícula quântica tenha massa m e se mova sob a influência de uma energia potencial $V(x,y,z,t)$. Postula-se, então, que a função de onda satisfaça à seguinte equação em derivadas parciais:

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \left[\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} \right] + V(x,y,z,t)\Psi \quad (4.1)$$

em que $\hbar = h/2\pi$, sendo h a constante de Planck. Esta é a famosa *Equação de Schrödinger*, proposta pelo físico austríaco Erwin Schrödinger (**Figura 4.1**), em 1926. Note que essa equação parece um pouco mais complicada que a equação da onda clássica que conhecemos. Mas não se preocupe, em breve você estará bastante familiarizado com ela.

Notem que estamos *postulando* que o estudo de um sistema microscópico consiste em encontrar a função de onda ψ , a qual satisfaz a Equação de Schrödinger. A única justificativa para a descrição da Física Quântica ser baseada nessas suposições é que elas funcionam. Em outras palavras, a Física Quântica baseada nessas suposições descreve corretamente todos os fenômenos aos quais tem sido aplicada. Existem, na literatura, apresentações da Equação de Schrödinger como sendo derivada da equação de onda, fazendo, com isso, diversas considerações que tentam mostrar a sua plausibilidade. Nós preferimos, entretanto, tratá-la como de fato ela é: um postulado. Não é possível chegar à Física Quântica a partir da Física Clássica apenas por uma argumentação lógica!



Figura 4.1: O físico austríaco Erwin Schrödinger (1887-1961), que, por seu trabalho de 1926, no qual propôs a equação que ganhou seu nome para a descrição da dinâmica das partículas quânticas, foi agraciado, juntamente com o físico inglês Paul Dirac, com o Prêmio Nobel de Física de 1933.

A partir de agora, vamos nos restringir ao caso unidimensional, em que x é a única coordenada. Além de levar a uma maior simplicidade, esse caso será suficiente para estudar a maioria das aplicações que consideraremos neste curso. No caso unidimensional, a Equação (4.1) se escreve:

$$i\hbar \frac{\partial \Psi(x,t)}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \Psi(x,t)}{\partial x^2} + V(x,t)\Psi(x,t). \quad (4.2)$$

Vemos imediatamente que, pelo fato de ser solução de uma equação complexa em derivadas parciais, a função de onda será necessariamente uma função complexa. Este fato será discutido no próximo item. A função de onda $\Psi(x,t)$ é uma função contínua e, sempre que o potencial $V(x,t)$ for finito, com derivada também contínua.

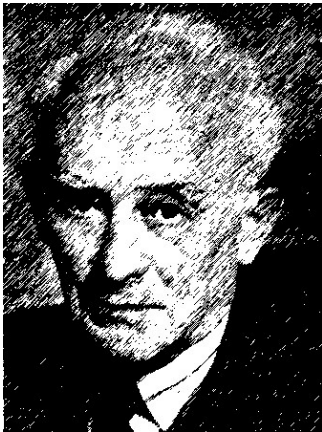


Figura 4.2: O físico alemão Max Born (1882-1970), que formulou a interpretação probabilística da função de onda e, por isso, foi agraciado com o Prêmio Nobel de Física de 1954.

INTERPRETAÇÃO FÍSICA DA FUNÇÃO DE ONDA

Antes de começarmos a resolver a Equação de Schrödinger em situações específicas, o que será feito nas próximas aulas, vamos entender melhor o significado da função de onda. Até o momento, ela parece apenas como uma quantidade abstrata. Será mesmo assim? Bem, vemos que, pelo fato de a função de onda ser uma quantidade complexa, ela não pode ser medida diretamente por nenhum instrumento físico. Isso significa que não há um sentido físico imediato para essa função! Portanto, vamos deixar bem estabelecido que, de fato, *a função de onda de um sistema nada mais é do que uma representação matemática abstrata do estado do sistema*. Ela somente tem significado no contexto da teoria quântica. Então, de que nos serve esta função? Podemos utilizá-la, de alguma forma, para descrever o mundo físico?

Max Born, em 1926, *postulou* que a densidade de probabilidade $p(x,t)$ de se encontrar a partícula na posição x , no instante t , poderia ser obtida a partir da função de onda pela relação:

$$p(x,t) = |\Psi(x,t)|^2, \quad (4.3)$$

de modo que a probabilidade de encontrarmos a partícula em uma região $a \leq x \leq b$ no instante t é dada por:

$$P[a,b] = \int_a^b |\Psi(x,t)|^2 dx. \quad (4.4)$$

Note que esta é apenas uma versão matematicamente mais precisa do que encontramos em nossos experimentos de fenda dupla descritos na Aula 2. Esse resultado é conhecido como “interpretação probabilística da função de onda”. Como toda probabilidade que se preza, $P[a,b]$ deve ser real e positiva, qualquer que seja o intervalo considerado. Isto é garantido pelo fato de que $|\Psi(x,t)|^2 = \Psi^*(x,t)\Psi(x,t)$ é real e positivo. Lembre-se: é o módulo ao quadrado de um número complexo! Além disso, a probabilidade deve ser normalizada, ou seja, a probabilidade de se encontrar a partícula em *qualquer* região do espaço, num dado instante de tempo, deve ser igual a 1:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\Psi(x,t)|^2 dx = 1. \quad (4.5)$$

Esta condição é conhecida como “normalização da função de onda”. Toda função de onda que se preza deve estar devidamente normalizada. Em três dimensões, a relação correspondente é

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} dx dy dz |\Psi(x, y, z, t)|^2 = 1 \cdot$$

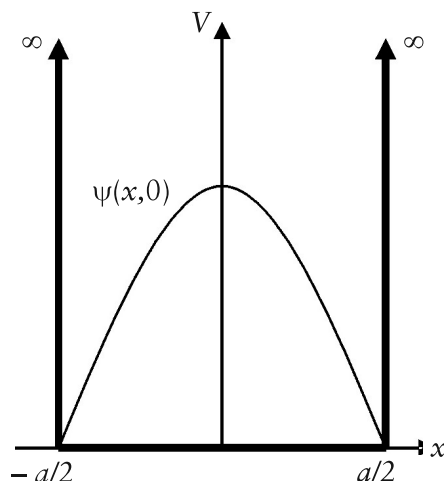


Figura 4.3: Energia potencial e função de onda em $t = 0$ do estado de mais baixa energia do poço infinito.

ATIVIDADE



1. Vamos exercitar alguns conceitos associados à interpretação probabilística da função de onda? A **Figura 4.3** mostra, em $t = 0$, a função de onda do chamado *estado fundamental* (o estado de energia mais baixa) do poço de potencial infinito. O poço infinito é aquele em que a energia potencial é zero numa certa região (no caso mostrado na **Figura 4.3**, em $-a/2 < x < a/2$) e infinita em todo o resto do espaço. Trata-se de uma idealização, mas é muito útil para estudar os poços de potencial encontrados na natureza. Veremos, nas próximas aulas, como resolver a Equação de Schrödinger para o poço infinito, mas este não é o nosso foco no momento. Conhecemos a solução e vamos trabalhar um pouco com ela.

A função de onda do estado fundamental é a seguinte:

$$\Psi(x, t) = \begin{cases} A \cos \frac{\pi x}{a} e^{-iEt/\hbar}, & -a/2 < x < a/2 \\ 0 & , x \geq a/2 \text{ ou } x \leq -a/2. \end{cases}$$

em que E é a energia da partícula no referido estado e A é um número real chamado de “constante de normalização”, a ser determinado.

- Usando o postulado de Born, obtenha a densidade de probabilidade $p(x,t)$ de se encontrar a partícula em um ponto qualquer do eixo x , no instante t . Verifique que esta densidade é real e positiva.
- Imponha a condição de normalização e encontre a constante A .
- Ache a probabilidade de se encontrar a partícula na metade direita do poço ($x > 0$).

RESPOSTA COMENTADA

a. Para calcular a densidade de probabilidade, basta usar o postulado de Born. Assim, obtemos

$$\Psi^*(x,t)\Psi(x,t) = \begin{cases} A \cos \frac{\pi x}{a} e^{iEt/\hbar} \times A \cos \frac{\pi x}{a} e^{-iEt/\hbar} = A^2 \cos^2 \frac{\pi x}{a}, & -a/2 < x < a/2. \\ 0, & x \geq a/2 \text{ ou } x \leq -a/2 \end{cases}$$

Como um cosseno ao quadrado é sempre real e positivo, a densidade de probabilidade também é real e positiva. Note ainda que a densidade é máxima na origem.

b. A condição de normalização é imposta da seguinte forma: $\int_{-\infty}^{\infty} |\Psi(x,t)|^2 dx = 1$. Assim, podemos obter a constante A :

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\Psi(x,t)|^2 dx = \int_{-a/2}^{a/2} A^2 \cos^2 \frac{\pi x}{a} dx = 1 \Rightarrow A^2 \frac{a}{2} = 1 \Rightarrow A = \sqrt{\frac{2}{a}}.$$

c. A probabilidade de encontrarmos a partícula na metade direita do poço é dada pela Equação (4.5):

$$P[0, \infty] = \int_0^{\infty} |\Psi(x,t)|^2 dx = \int_0^a \frac{2}{a} \cos^2 \frac{\pi x}{a} dx = \frac{1}{2} = 50\%.$$

Ou seja, a partícula pode estar com igual probabilidade do lado direito e do lado esquerdo do poço. Isto é esperado, visto que o potencial é simétrico com relação à origem!

OPERADORES E VALORES ESPERADOS

A esta altura, você já deve estar convencido da natureza probabilística do mundo quântico (ou, ao menos, deve ter se conformado com ela). Vimos, na experiência de fenda dupla (Aula 2), que não podemos prever o resultado de um único evento (como a posição do impacto de um elétron no anteparo). Podemos, porém, fazer uma análise estatística

de um número muito grande de eventos. Por exemplo, se fizermos várias medidas da posição x do elétron no anteparo, que valor médio ou *valor esperado* da posição $\langle x \rangle$ iremos obter?

O resultado importantíssimo descrito no item anterior nos permite fazer este cálculo. Uma vez que temos a distribuição de probabilidades, isto se torna simples, basta usar um resultado bem conhecido de estatística elementar:

$$\langle x \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x |\Psi(x,t)|^2 dx . \quad (4.6)$$

Seguindo essa receita, podemos calcular outras quantidades de interesse, tais como o valor esperado $\langle f \rangle$ de uma função qualquer da posição x , $f(x)$. Essa quantidade é dada pela expressão usual para o valor esperado:

$$\langle f \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) |\Psi(x,t)|^2 dx , \quad (4.7)$$

mas que escreveremos na forma

$$\langle f \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \Psi^*(x,t) f(x) \Psi(x,t) dx . \quad (4.8)$$

A Equação (4.8) é completamente equivalente à Equação (4.7). Mas, então, qual é a vantagem de escrevê-la desta forma? Na verdade, a Equação (4.8) é apenas um caso particular do seguinte resultado mais geral:

$$\langle O \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \Psi^*(x,t) O [\Psi(x,t)] dx , \quad (4.9)$$

em que O é um *operador quântico* e $\langle O \rangle$ é seu valor esperado. Um operador quântico “opera” ou atua sobre uma função de onda, e o resultado é uma outra função. Indicamos por $O[\Psi(x,t)]$ o resultado da operação do operador O sobre a função de onda Ψ . No caso mais simples, um operador pode ser uma função $f(x)$. Quando isso acontece, o resultado da operação é simplesmente o produto da função f pela função de onda Ψ , ou seja, $O[\Psi(x,t)] = f(x)\Psi(x,t)$. Neste caso, a expressão (4.9) se reduz à (4.8). Porém, no caso mais geral, um operador quântico pode envolver operações mais complicadas, como, por exemplo, a diferenciação. Veremos exemplos desse tipo na Aula 5.

Afinal, para que servem os operadores quânticos e a Equação (4.9)? Certamente não são apenas uma curiosidade matemática, muito pelo contrário. Os operadores desempenham um papel central no formalismo da Física Quântica. Este papel é definido pelo seguinte postulado: *A cada grandeza física corresponde um operador quântico.* E mais: supondo uma partícula no estado quântico definido pela função de onda Ψ , o valor esperado da medida da grandeza física correspondente ao operador O (ou seja, o valor médio estatístico de muitas medidas desta grandeza) é dado pela Equação (4.9).

Vale a pena meditar sobre a importância desse resultado. Na Aula 2, aprendemos que na Física Quântica é impossível prever, com certeza, o resultado de uma única medida. Na ocasião, você pode ter sentido uma limitação repentina em suas possibilidades de conhecer a dinâmica de um sistema físico, algo que não existia na Física Clássica. Agora, observamos que ao menos o valor médio de um número muito grande de medidas pode ser predito pela teoria. Recuperamos, ainda que parcialmente, nosso poder preditivo.

Na próxima aula, conheceremos dois operadores bastante importantes, associados à energia e ao momento linear. Veremos que eles não podem ser definidos por uma simples função da posição $f(x)$. Mas, antes, que tal trabalharmos um pouco com alguns operadores mais simples?

ATIVIDADE FINAL

Considere mais uma vez a função de onda do estado fundamental do poço infinito – Equação (4.6).

a. Calcule o valor esperado da posição x e interprete seu resultado.

b. Além do valor esperado de um conjunto de muitas medidas, podemos calcular o desvio-padrão $\Delta x = \sqrt{\langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2}$. O desvio-padrão mede a faixa de valores em que a probabilidade de medida é alta. Dessa forma, ele dá uma idéia da incerteza da medida. Calcule o desvio-padrão da posição para o estado fundamental do poço infinito.

RESPOSTA COMENTADA

a. O valor esperado da posição é obtido da seguinte forma:

$$\begin{aligned}\langle x \rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} \Psi^*(x,t) \Psi(x,t) x \Psi(x,t) dx = \int_{-a/2}^{a/2} \sqrt{\frac{2}{a}} \cos \frac{\pi x}{a} e^{iEt/\hbar} x \sqrt{\frac{2}{a}} \cos \frac{\pi x}{a} e^{-iEt/\hbar} dx = \\ &= \frac{2}{a} \int_{-a/2}^{a/2} x \cos^2 \frac{\pi x}{a} dx = 0.\end{aligned}$$

Podemos entender este resultado por simetria: a partícula tem igual probabilidade de ser encontrada do lado direito e do lado esquerdo do poço, de modo que o valor mais provável é $x = 0$.

b. Calcular a incerteza $\Delta x = \sqrt{\langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2}$

$$\begin{aligned}\langle x^2 \rangle &= \frac{2}{a} \int_{-a/2}^{a/2} x^2 \cos^2 \frac{\pi x}{a} dx = \frac{a^2}{2\pi^2} \left(\frac{\pi^2}{6} - 1 \right) = 0,033a^2 \\ \Delta x &= \sqrt{\langle x^2 \rangle} = 0,18a.\end{aligned}$$

RESUMO

O estado quântico de uma partícula é descrito por sua função de onda, que satisfaz à Equação de Schrödinger. O módulo ao quadrado da função de onda nos dá a amplitude de probabilidade de encontrarmos a partícula numa certa posição. A cada grandeza física corresponde um operador quântico. Assim, com o conhecimento da função de onda, é possível obter o valor esperado das medidas dessa grandeza.

INFORMAÇÕES SOBRE A PRÓXIMA AULA

Na próxima aula, vamos conhecer os operadores energia e momento linear e descreveremos o Princípio da Incerteza de Heisenberg.